

LOGARITMO E DECIBEL

A CURA DI EMANUELE COSTANTINI

IL LOGARITMO

Le operazioni aritmetiche si possono classificare anche in base alla loro maggiore o minore difficoltà di esecuzione:

Operazioni di 1° grado: addizione e sottrazione

Operazioni di 2° grado: moltiplicazione e divisione

Operazioni di 3° grado: elevamento a potenza ed estrazione di radice

Il logaritmo è un operatore matematico che permette di “abbassare il grado” delle operazioni in modo seguente:

3° grado \longrightarrow 2° grado \longrightarrow 1° grado

Consideriamo i due insiemi infiniti:

$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... \}$

$M = \{ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128... \}$

L'insieme N dei numeri naturali può essere considerato come una progressione aritmetica avente come primo termine 0 e ragione 1; L'insieme M, invece, è una progressione geometrica con primo termine 1 e ragione 2.

Introduciamo una corrispondenza biunivoca f così definita:

$f: M \longrightarrow N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...

M	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024...
---	---	---	---	---	----	----	----	-----	-----	-----	---------

In questa situazione diciamo che i numeri appartenenti ad N, rappresentano i **logaritmi in base 2** dei numeri sottostanti in M (\log_2).

Se invece introduciamo la seguente sequenza:

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8...

X	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000...
---	---	----	-----	------	-------	--------	---------	----------	--------------

I numeri appartenenti a Y rappresentano i **logaritmi in base 10** dei numeri appartenenti a X. L'insieme X può essere inteso come l'insieme di tutte le successive potenze di 10 ad esponente intero non negativo.

Possiamo scrivere:

Y	0	1	2	3	4	5	6
X	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

E' allora possibile interpretare il logaritmo in base 10 di un certo numero X come *l'esponente al quale bisogna elevare la base 10 per ottenere quel numero.*

$$\log X = Y \text{ implica che } X = 10^Y$$

Ad esempio, affermare che il logaritmo in base 10 di 1000 è 3 equivale a dire che 3 è quel numero a cui si deve elevare la base 10 per ottenere come risultato 1000.
In simboli:

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \Rightarrow \quad 1000 = 10^3$$

Quando non specificato il log si intende \log_{10} .

EQUIVALENZA FRA IL LOGARITMO E LA FORMA ESPONENZIALE

Prendiamo i seguenti esempi:

$$10 \cdot \log 2 = 3,01 \text{ nella forma esponenziale diventa: } 2 = 10^{\frac{3,01}{10}}$$

$$20 \cdot \log 2 = 6,02 \text{ nella forma esponenziale diventa: } 2 = 10^{\frac{6,02}{20}}$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

Il logaritmo esiste ed è unico in una base positiva diversa da 1.

Assicurato questo continuiamo con le seguenti proprietà dei logaritmi:

$$\log m \cdot n = \log m + \log n$$

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$$

$$\log m^n = \log m + \log n$$

$$\log \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log m$$

$$\log m^n = n \cdot \log m$$

ESEMPI DI LOGARITMI

$$\log 2 = 0,3$$

$$\log 1/2 = \log 0,5 = -0,3$$

$$\log 0,001 = -3$$

$$\log 0,01 = -2$$

$$\log 0,1 = -1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 10,000,000,000,000 = 13$$

Da questi esempi si comprende che:

1. se un numero è una potenza di 10 il logaritmo si calcola facilmente contando il numero di zeri che compongono la cifra.
2. Numeri maggiori di 1 hanno un valore logaritmico positivo.
Numeri minori di 1 hanno un valore logaritmico negativo.

IL DECIBEL

Il Bel è una unità di misura relativa che prende il nome da Alexander Graham Bell. E' definita come il logaritmo (in base 10) di un rapporto fra due valori, quello misurato e quello di riferimento:

$$Bel = \log\left(\frac{N_{misurato}}{N_{riferimento}}\right)$$

Il Bel quindi non è propriamente una unità di misura ma un numero puro, in quanto indica un rapporto. Solitamente quindi è seguito da un pedice che indica quale unità di riferimento adottiamo per tale misura.

Questo rapporto descrive un guadagno se il valore misurato è maggiore del valore di riferimento ($N_m > N_{rif}$); descrive una perdita se il misurato è più piccolo del valore di riferimento ($N_m < N_{rif}$).

Essendo una unità troppo grande per i circuiti audio, si adotta il deciBel (1/10 di un Bel).

Viene utilizzata questa unità logaritmica per misure correlate al suono perché il funzionamento psicoacustico dell'orecchio umano è simile all'incremento esponenziale logaritmico (il rapporto tra il più piccolo suono percepibile e la soglia del dolore è circa 10.000.000.000.000:1) e i risultati che si ottengono quindi da questi rapporti rispecchiano il comportamento del nostro apparato uditivo.

Si definisce il deciBel con l'equazione:

$$dB = 10 \cdot \log\left(\frac{N_{misurato}}{N_{riferimento}}\right)$$

Per misure di potenza si adotta la seguente equazione:

$$dB = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{P_{rif}}\right) \quad (1)$$

Per misure di tensione, corrente e pressione acustica la relazione semplificata è:

$$dB = 20 \cdot \log\left(\frac{N}{N_{rif}}\right)$$

Questo perché la relazione fra Potenza e Tensione o corrente porta con sé un elevamento alla potenza di due.

Se ad esempio prendiamo una misura di Tensione, la sua relazione con la Potenza è:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

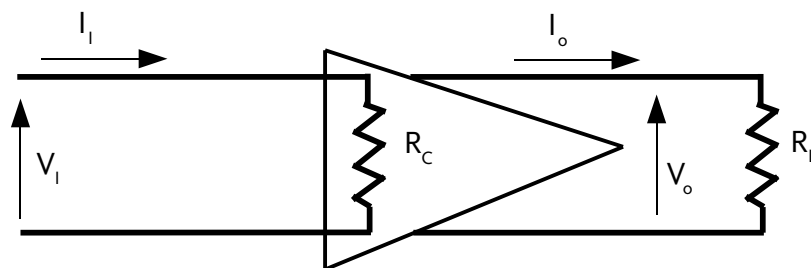
Sostituendo nella formula (1) si ha:

$$db = 10 \cdot \log \left(\frac{V^2}{R} \right) \cdot \left(\frac{R_{rif}}{V_{rif}^2} \right)$$

Se l'accoppiamento del nostro circuito ha lo stesso valore di impedenza si ha:

$$db = 10 \cdot \log \left(\frac{V}{V_{rif}} \right)^2 = 20 \cdot \log \frac{V}{V_{rif}}$$

Prendendo ad esempio un semplice circuito amplificatore, possiamo dimostrare le formule appena descritte:



La potenza in ingresso dell'amplificatore è data da:

$$P_I = \frac{V_I^2}{R_C}$$

dove R_C è l'impedenza del circuito stesso.

La potenza di uscita del circuito dipenderà quindi anche dall'impedenza del carico collegato ad esso:

$$P_O = \frac{V_O^2}{R_L}$$

dove R_L è l'impedenza di carico (Load).

Il guadagno G dell'amplificatore è dato dalla relazione:

$$G = 10 \cdot \log \left(\frac{P_O}{P_I} \right) = 10 \cdot \log \left(\frac{V_O}{V_I} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_I}{R_O} \right)$$

Riscrivibile come:

$$G = 20 \cdot \log \left(\frac{V_O}{V_I} \right) + 10 \cdot \log \left(\frac{R_I}{R_O} \right)$$

Se le impedenze del circuito sono identiche il guadagno di uscita è dato solo dal rapporto fra le tensioni.

UNITA' RELATIVE COMUNEMENTE USATE

Di seguito sono riportate alcune unità deciBel assolute comunemente utilizzate.

dB_m

Il livello di riferimento è 1 milliwatt (m) su un'impedenza di 600Ω.

In questo tipo di tecnologia si massimizza il trasferimento di potenza accoppiando l'impedenza di uscita e d'ingresso di due circuiti connessi.

Un segnale a 0 dB_m in un circuito a 600Ω corrisponde a 0,7746V.

$$dB_m = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{P_{rif}}\right)$$

dB_w

Il livello di riferimento è 1 Watt (W).

per i rapporti appena descritti vale la formula seguente:

$$dB_w = 10 \cdot \log\left(\frac{W}{W_{rif}}\right)$$

dBV

Il livello di riferimento è 1V.

Il valore di impedenza del circuito non ha importanza.

I prodotti non professionali sono progettati per un livello di ingresso nominale di -10 dB_v, il quale corrisponde a 0,316V.

$$dB_v = 20 \cdot \log\left(\frac{V}{V_{rif}}\right)$$

dB_u, o dB_v

L'unità dB_v è ormai stata sostituita del tutto con dB_u per eliminare confusione con dBV.

Il livello di riferimento è 0,7746V.

Il valore di impedenza non ha importanza.

La lettera u sta per "unloaded" che descrive l'uscita di un circuito che lavora su un carico molto piccolo o inesistente (circuito aperto), tipico dei circuiti moderni.

$$dB_u = 20 \cdot \log\left(\frac{V}{V_{rif}}\right)$$

RELAZIONE TRA dB_u, dB_m E dBV

Per convertire dBV in dB_u si aggiunge 2,2dB.

Per convertire dB_u in dBV si sottrae 2,2dB.

TABELLA DI COMPARAZIONE dB_u E dBV CON RELATIVI VALORI DI TENSIONE

dBV	dB _u o dB _m	V (rms)
+ 6,0	+ 8,2	2,0
+ 4,0	+ 6,2	1,6
+ 1,78	+ 4,0	1,23
0	2,2	1,00
-2,2	0	0,775
-6,0	-3,8	0,5
-8,2	-6,0	0,388
-10,0	-7,8	0,316
-12	-9,8	0,250
-12,2	-10,0	0,245
-20,0	-17,8	0,100

dB_{FS}

"FS" significa "Full Scale", unità di riferimento adottata per sistemi digitali.

Il "Full Scale" o "Maximum Coding Level", è il valore analogico massimo che il sistema digitale riesce a descrivere.

Quando un segnale analogico supera tale valore il dispositivo digitale descrive ogni valore oltre il massimo consentito come il massimo valore digitale, si ottiene quindi un taglio netto (clip) sull'onda sinusoidale in questione, la distorsione digitale.

Il dB_{FS} indica quanto distante è l'attuale valore al massimo consentito.

dB_{SPL}

La pressione sonora (Sound Pressure) è la forza N di un suono su una superficie in m² perpendicolare ad esso.

Il livello di riferimento è il suono più debole che può essere percepito dall'orecchio umano: 20 µPa (micropascals); 20 µN/m²

oppure

0.0002 dyne/cm² ; 0,0002 microbar

$$dB_{SPL} = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_{rif}}\right)$$

Da questa formula si ricava che se una fonte sonora raddoppia la sua distanza, il livello di pressione sonora diminuisce di 6dB:

$$20 \cdot \log\left(\frac{0,5}{1}\right) = 20 \cdot (-0,3) = -6 dB_{SPL}$$

viceversa se una fonte sonora dimezza la sua distanza il livello di pressione sonora aumenta di 6dB:

$$20 \cdot \log\left(\frac{2}{1}\right) = 20 \cdot (0,3) = 6 \text{ dB}_{\text{SPL}}$$

Questi risultati introducono la “legge del quadrato inverso della distanza”. (Inverse-square distance law)

Per un uso più generale si può utilizzare la formula:

$$\text{differenza di pressione sonora} = 20 \cdot \log\left(\frac{d_1}{d_2}\right)$$

Valida però solo per onde sonore sferiche.

Come già anticipato la soglia uditiva è 20 µPa mentre la soglia del dolore è circa 100Pa. Con la formula sopra riportata si ottiene un valore di circa 133dB_{SPL}.

SCALA dB_{SPL}

L'orecchio umano è un segnapotenziale di pressione sonora che non ha una risposta piatta allo spettro di frequenza del segnale. In tal modo le misure vengono “pesate” nel dominio della frequenza in modo da far combaciare il valore misurato con quello percepito. Secondo le norme IEC le misure “A-weighting” corrispondono alla reazione dell'udito umano ai toni puri; le misure “C-weighting” corrispondono a livelli di picco sonoro. Se si desidera una misura pura, si adotta il sistema non pesato o “flat”.

In queste misure è importante anche conoscere la distanza dalla fonte sonora, in quanto un suono propagato diminuisce pressione seguendo il rapporto 1/r.

Al di sopra dei 194dB_{SPL} in aria, al livello del mare, variando al variare della pressione barometrica, il livello di pressione di un'onda sonora diventa distorta.

Ricordando che le onde sonore sono composte da cicli di rarefazione e compressione, quando la metà onda compressa è il doppio della pressione atmosferica, la metà onda rarefatta raggiunge il vuoto perfetto, in assenza di molecole.

A questo punto il solo possibile incremento in livello sonoro è tramite la metà onda compressa.

A questo livello di pressione le onde non sono più considerate suono, ma “onda shock” (shock wave).

Esempi possono essere: tuoni, terremoti, esplosioni ultrasoniche, eruzioni vulcaniche, razzi.

dB_{SPL}	Ambiente ed effetti uditivi	Sorgente sonora e distanza	Indicazioni in partitura
194.0937	Limite teorico per suoni non distorti alla pressione atmosferica di 1 bar		
180		Esplosione del Krakatoa a 160 Km in aria	
170			
160	Rottura immediata timpano		
150		Motore di un Jet 10m	
140		Sparo di fucile 1m	
130	Soglia del dolore	Cannone a 300m	
120	Disagio e danneggiamento del timpano per brevi esposizioni	Jet in decollo a 100m Rivettatrice a 30 cm	
110		Sega elettrica 1m	<i>fff</i>
100		Tagliaerba 1,5m	<i>ff</i>
90		Teno metropolitana a 50m	<i>f</i>
80	Danneggiamento del timpano per lunghe esposizioni	Martello pneumatico a 150m Orchestra di 75 elementi a 7m	<i>mf</i>
70		Treno merci a 300m Aspirapolvere a 3m Parlato a 30 cm Traffico cittadino a 15 m	<i>mp</i>
60		Parlato a 1m	<i>p</i>
50	Piccolo Ufficio		<i>pp</i>
40	Libreria		<i>ppp</i>
30	Auditorium vuoto	Sussurro a 1,5m	
20	Studio di registrazione		
10		Respiro; frusciare di foglie	
0	Soglia uditiva (1000÷4000Hz)		

SOMMA E SOTTRAZIONE CON I DECIBEL

I deciBels sono unità logaritmiche e non possono essere addizionate o sottratte algebricamente.

E' necessario convertire ogni lettura dB nella sua equivalente potenza, sottrarre o addizionare le potenze per poi riconvertire nel valore in dB ottenuto.

Quindi:

$$\text{addizione dB} = 10 \cdot \log \left(10^{\frac{dB_1}{10}} + 10^{\frac{dB_2}{10}} \dots + 10^{\frac{dB_n}{10}} \right)$$

$$\text{sottrazione dB} = 10 \cdot \log \left(10^{\frac{dB_1}{10}} - 10^{\frac{dB_2}{10}} \dots - 10^{\frac{dB_n}{10}} \right)$$

Se addizioniamo due fonti sonore con la stessa intensità, istintivamente viene da dire che otteniamo un raddoppio del valore in dB.

Facciamo il calcolo per verificare se è così, prendendo ad esempio due fonti sonore di 30dB SPL

$$10 \cdot \log \left(10^{\frac{30}{10}} + 10^{\frac{30}{10}} \right)$$

$$10 \cdot \log (10^3 + 10^3) = 33,01$$

abbiamo ottenuto così un aumento di soli 3dB.

REFERENZE

LETTURE

Carlo Drioli, Nicola Orio – Elementi di acustica e psicoacustica

David Miles Huber, Robert E. Runstein – Modern recording techniques – Focal Press

Glen Ballou – Handbook for Sound Engineers: The new Audio Cyclopedia – Howard W. Sams & Company

Henry W. Ott – Noise Reduction Techniques in Electronic Systems – Wiley-Interscience Publications: 1988

Bob Metzler – Audio Measurement Handbook – Audio Precision Inc.

Floyd E. Toole – Standard Handbook of Audio and Radio Engineering – McGraw-Hill; 2004

Gary Davis and Ralph Jones – Yamaha Sound Reinforcement Handbook – Hal Leonard Publishing Corporation; 1989

SITI WEB

<http://www.sizes.com/units/decibel.htm>

<http://www.wikipedia.com>